マイナス金利下における金利デリバティブ商品のプライシングモデル

1. はじめに

2016 年 1 月 29 日にマイナス金利政策が導入され、10 年以下の円金利スワップがマイナス領域に沈んでから半年が経過した。それに伴い、金利デリバティブの評価で長年用いられてきたBlackモデルでの計算が不可能となった。このモデルは原資産が対数正規分布に従うと仮定しているため、原資産が負値となることを許容しない。したがって市場では昨年度末からマイナス金利に対応した新しい金利デリバティブのモデルが導入され始めた。

その中でも代表的なモデルとして原資産が対数正規分布に従う Shifted Lognormal モデルと正規分布に従う Normal Volatility モデルがある。円金利市場では、すでに一般的な金利デリバティブ商品である金利キャップ・フロアや金利スワップションにおいて、それぞれのモデルを前提としたボラティリティが情報端末で提示されている。特に正規分布ベースのボラティリティは米国市場でよく使われているといわれるが、マイナス金利下の円金利市場でも提示されるようになり、市場参加者の注目が集まっている。

Shifted Lognormal モデルについては以前のレポートで紹介した[1]。本稿では Normal Volatility モデル[2]の一つである Bachelier モデルを紹介し、Shifted Lognormal モデルと比較する。

2. Bachelier モデル

Bachelierモデルは原資産が正規分布に従うモデルであり、リーマンショック以降の金利低下局面で注目され始めた（櫻井 2016）。

これは原資産のフォワードレートF_tが以下の確率微分方程式に従うモデルである。

$$dF_t = \sigma_N dW_t$$

ここでW_tはブラウン運動、σ_Nは正規分布のボラティリティである。

対して Black モデルでは以下の確率微分方程式に従う。

σ_{LN}は対数正規分布のボラティリティである。

$$dF_t = \sigma_{LN} F_t dW_t$$

また Shifted Lognormal モデルでは以下の確率微分方程式に従う。

σ_{SLN}はシフト幅 h の対数正規分布のボラティリティである。

$$dF_t = (F_t + h)\sigma_{SLN} dW_t$$

---

[1] Shifted Lognormal Volatility モデルについては 2015 年度に当部より発信した「フィナンシャルエンジニアレポート Vol20」で紹介している。

[2] 他に Hull-White モデルなどがある。

Bachelier モデルでヨーロピアンタイプのオプション価値は、原資産を F、行使価格をK、割引率をDF、満期までの期間を T とすると、以下の通りとなる。ここでNは正規分布の累積分布関数、N′は正規分布の確率密度関数である。

$$PV = DF\left[\varepsilon(F-K)N(\varepsilon d) + \sigma_N\sqrt{T}N'(d)\right]$$

$$d = \frac{F-K}{\sigma_N\sqrt{T}}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \cdots \quad \text{Call Type} \\ -1 & \cdots \quad \text{Put Type} \end{cases}$$

続けてグリークスと呼ばれる各パラメータの感応度、デルタ（Δ）、ガンマ（Γ）、ベガ（v）を示す。

$$\Delta = \frac{\partial PV}{\partial F} = \varepsilon DFN(\varepsilon d)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 PV}{\partial F^2} = \frac{DFN'(d)}{\sigma_N\sqrt{T}}$$

$$v = \frac{\partial PV}{\partial \sigma_N} = DF\sqrt{T}N'(d)$$

3. Bachelier モデルと Shifted Lognormal モデル

Bachelier モデルと Shifted Lognormal モデルを、両者のグリークスで比較してみる。これらリスク値はトレーディングを実施する上で不可欠なものであり、ディーラーはこの数値を参考にポジション管理を行うからだ。対象商品には代表的な金利デリバティブ商品である金利スワップションを取り上げた。

表 1 に金利スワップションを対象とした Bachelier モデルと Shifted Lognormal モデルの計算式を記述する。$S_{T,\tau}$ は T 年先スタートτ年の 6 ヵ月ロールのフォワードスワップレート、h はシフト幅である。Black モデルは Shifted Lognormal モデルの h=0 のケースである。

表 1 両モデルの金利スワップション計量式

	Bachelier モデル	Shifted Lognormal モデル
プレミアム	$\sum_{t=T}^{T+2\tau}\delta_t DF_t\left[\varepsilon\left(S_{T,\tau}-K\right)N(\varepsilon d)+\sigma_N\sqrt{T}N'(d)\right]$	$\sum_{t=T}^{T+2\tau}\delta_t DF_t\varepsilon\left[\left(S_{T,\tau}+h\right)N(\varepsilon d_1)-(K+h)N(\varepsilon d_2)\right]$
デルタ	$\varepsilon\sum_{t=T}^{T+2\tau}\delta_t DF_t N(\varepsilon d)$	$\varepsilon\sum_{t=T}^{T+2\tau}\delta_t DF_t N(\varepsilon d_1)$
ガンマ	$\sum_{t=T}^{T+2\tau}\delta_t DF_t\frac{N'(d)}{\sigma_N\sqrt{T}}$	$\sum_{t=T}^{T+2\tau}\delta_t DF_t\frac{N'(d_1)}{\left(S_{T,\tau}+h\right)\sigma_{SLN}\sqrt{T}}$

ベガ	$\sum_{t=T}^{T+2\tau}\delta_t DF_t\sqrt{T}N'(d)$	$\left(S_{T,\tau}+h\right)\sum_{t=T}^{T+2\tau}\delta_t DF_t N'(d_1)\sqrt{T}$
	$d=\frac{S_{T,\tau}-K}{\sigma_N\sqrt{T}}$ $\varepsilon=\begin{cases}1 & \cdots\ \text{Payers}\\ -1 & \cdots\ \text{Recievers}\end{cases}$	$d_1=\frac{\ln\left[\left(S_{T,\tau}+h\right)/(K+h)\right]+\sigma_{SLN}^2 T/2}{\sigma_{SLN}\sqrt{T}}$ $d_2=d_1-\sigma_{SLN}\sqrt{T}$ $\varepsilon=\begin{cases}1 & \cdots\ \text{Payers}\\ -1 & \cdots\ \text{Recievers}\end{cases}$

ガンマ、ベガはペイヤーズスワップションとレシーバーズスワップションで同じである。

ここで原資産が 5 年の金利スワップで満期が 5 年の金利スワップションの ATM ストラドルの買いポジション（ペイヤーズの買い+レシーバーズの買い）を考える。そのポジションでのフォワードスワップレート（$S_{T,\tau}$）が 0.42%、Annuity（$\sum_{t=1}^{T+\tau}\delta_t DF_t$）が 5.05、プレミアムが 300bp だとする[3]。
そのときの各モデルのボラティリティおよびリスク値を算出した。結果を表 2 に示す。
それぞれ LN が Black モデル、N が Bachelier モデル、SLN がシフト幅 2%の Shifted Lognormal モデルである。

表 2 各モデルによるストラドルポジションの計量値

	ストラドル		
	LN	N	SLN
プレミアム	300 bp	300 bp	300 bp
ボラティリティ	94.10%	0.33%	13.81%
デルタ	3.57	0.00	0.62
ガンマ	262	541	533
ベガ	0.02	9.01	0.22

また両モデルの ATM ストラドル下での Black モデルとのリスク値の関係式を表 3 に示す。これは Bachelier モデルおよび Shifted Lognormal モデルのリスクと、Black モデルのリスクの比率を表している。

表 3 各モデルと Black モデルのリスク比率

	Bachelier モデル	Shifted Lognormal モデル
デルタ比率		$\frac{\Delta_{LN}}{\Delta_{SLN}}=\frac{2N\left(\frac{1}{2}\sigma_{LN}\sqrt{T}\right)-1}{2N\left(\frac{1}{2}\sigma_{SLN}\sqrt{T}\right)-1}$
ガンマ比率	$\frac{\Gamma_{LN}}{\Gamma_N}=\frac{1}{S_{T,\tau}}\frac{\sigma_N}{\sigma_{LN}}\exp\left[-\frac{T}{8}\sigma_{LN}^2\right]$	$\frac{\Gamma_{LN}}{\Gamma_{SLN}}=\left(\frac{S_{T,\tau}+h}{S_{T,\tau}}\right)\frac{\sigma_{SLN}}{\sigma_{LN}}\exp\left[-\frac{T}{8}\left(\sigma_{LN}^2-\sigma_{SLN}^2\right)\right]$

[3] LN のボラティリティを低く抑えるため、市場実勢とは異なる数値でシミュレーションを行っている。

ベガ比率	$\frac{v_{LN}}{v_N} = S_{T,\tau}\exp\left[-\frac{T}{8}\sigma_{LN}^2\right]$	$\frac{v_{LN}}{v_{SLN}} = \left(\frac{S_{T,\tau}}{S_{T,\tau}+h}\right)\exp\left[-\frac{T}{8}\left(\sigma_{LN}^2 - \sigma_{SLN}^2\right)\right]$

さらにこの状態からプレミアムが 330bp、フォワードスワップレートが 0.47%に上昇した場合をシミュレートした。結果を表 4 に示す。

表 4 プレミアムおよびフォワードスワップレートが上昇した場合の損益要因分析

	ストラドル		
	LN	N	SLN
プレミアム	330 bp	330 bp	330 bp
ボラティリティ	99.41%	0.366%	15.02%
ボラティリティ変化	5.31%	3.3 bp	1.21%
デルタ要因	17.9 bp	0.0 bp	3.1 bp
ガンマ要因	0.3 bp	0.7 bp	0.7 bp
ベガ要因	11.6 bp	29.4 bp	26.1 bp
合計	29.7 bp	30.0 bp	29.9 bp

まず Black モデルの結果を見てみる。表 2 のデルタの項を見ると相対的に大きいことが分かる。これは今回の試算のような低金利下では Black モデルのボラティリティが相対的に高いため、表 1 より、ペイヤーズとレシーバーズのデルタが乖離したためだと考えられる。結果的に表 4 からもデルタの変動要因が、他のモデルと比較して大きく寄与していることが分かる。

Bachelier モデルは、表 1 より原資産と行使価格が等しい ATM であれば、ペイヤーズとレシーバーズのデルタの絶対値は等しくなり、ストラドルのデルタが 0 となる特徴がある。また同じく ATM であればグリークスが現行水準$S_{T,\tau}$とσ_Nに依存しないという特徴も分かる。表 4 から今回の試算ではその損益のほとんどがベガ要因であることが分かる。

Shifted Lognormal モデルは、表 2 のデルタの値が Black モデルと比較して小さく、表 3 からその差異の要因が両モデルのボラティリティの比率だということが分かる。逆にベガの値は 10 倍程度大きく、表 4 からもその変動要因のほとんどがベガ要因であることが分かる。今回のシミュレーション結果の傾向として、Black モデルより Bachelier モデルの結果に近いことが見て取れた。

上述の計算のようにトータルの損益が同じでもモデルによってその要因は異なったり[4]、ストラドルのデルタが 0 となるなど各モデルで特徴があることも分かった。実際のオペレーションやポジション管理の際には注意が必要である。

4. おわりに

マイナス金利下でのオプション評価モデルとして Normal Volatility モデルの一つである Bachelier モデルを紹介した。前節の通り Bachelier モデルと Shifted Lognormal モデルではそれぞれ特徴があり、どちらを採用するかは下記のようなメリット・デメリットも踏まえながら慎重に判断する必要がある。

Shifted Lognormal モデルの場合、既存評価モデルが Black モデルであればその拡張は比較的容易である。ただ

[4] これらの結果はあくまでシミュレーションの一例であり、シナリオの設定により数値も変わってくることが考えられる。

しモデル上シフト幅以上のマイナス金利は許容されず、また市場で提示されるシフト幅が変化する可能性がある[5]。シフト幅が変化するとリスク値も変化し、また時系列データの連続性も失われてしまうため過去データを使う VaR 計算などに影響を及ぼす。

Bachelier モデルの場合、シフト幅に気を使うこともなく、また ATM ストラドルであればデルタニュートラルになり、ポジション管理が容易になるだろう。だが、金利の分布が対称とするモデル上の前提条件が市場に適合的かどうかの問題もある。

こういった市場価格への適合やリスク管理の観点から、さらなるモデルの高度化も考えられるため、引き続き今後の動向に注視していきたい。

（金融技術開発部　増田　晃弘）

照会先：みずほ情報総研株式会社　金融技術開発部

東京都千代田区神田錦町 3-1

参考文献

櫻井豊（2016）『数理ファイナンスの歴史』株式会社きんざい

[5] 先行してマイナス金利に突入した欧州市場では金利スワップションのシフト幅も変化する。現状、円金利市場でシフト幅が変化するという話は出ていない。